

Динамика открытых квантовых систем в хаотическом окружении: структура квантовой запутанности и методы расчета

Арефьева Наталия

Научный руководитель: кандидат физ-мат наук,
Поляков Евгений Александрович

Классический хаос

Малое изменение начальных условий приводит к экспоненциальному расхождению траекторий в фазовом пространстве:

$$\|\delta x_t\| \approx e^{\Lambda t} \|\delta x_0\|, \quad \Lambda — \text{максимальная экспонента Ляпунова}$$

Квантовый хаос

1) Распределение межуровневых интервалов Вигнера-Дайсона — хаотическая квантовая система:

$$P_{chaos}(\omega) = \frac{\pi}{2} \omega \exp\left(-\frac{\pi}{4} \omega^2\right)$$

Распределение межуровневых интервалов Пуассона — интегрируемая квантовая система:

$$P_{int}(\omega) = e^{-\omega}, \quad \text{где } \omega = (E_{n+1} - E_n)/\langle \omega \rangle$$

2) Out-of-time ordered correlators (OTOC):

$$\begin{aligned} C_{ij}(t) &= \langle [\hat{q}_i(t), \hat{p}_j(0)]^2 \rangle \approx \hbar^2 \{q_i(t), p_j(0)\}^2 = \\ &= \hbar^2 \left| \frac{\partial q_i(t)}{\partial p_j(0)} \right|^2 \approx \hbar^2 \frac{\|\delta z(t)\|^2}{\|\delta z(0)\|^2} \approx \hbar^2 e^{2\Lambda t} \end{aligned}$$

Цели работы

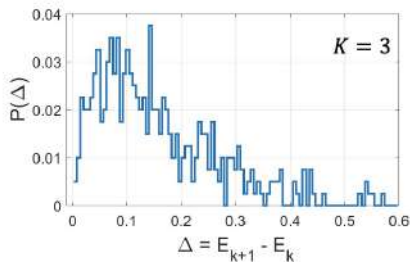
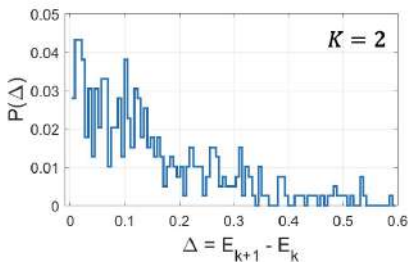
МОТИВАЦИЯ: для возникновения квантового хаоса необходимо окружение [M.Berry, 2001]

1. Определение квантового хаоса по аналогии с классическим, рассматривая хаотическую открытую квантовую систему (ОКС) в окружении:
 - Благодаря окружению вводится понятие квантовых траекторий (декогерентных историй)
 - Окружение рассматривается как устройство, записывающее историю движения ОКС в некоторых своих степенях свободы
 - Записи истории движения ОКС можно измерять, а статистика измерений даст ансамбль квантовых траекторий
 - Выявляется критерий квантового хаоса на основе введенного понятия квантовых траекторий
2. Рассмотрение квантового окружения, которое само является хаотической системой конечного объема (квантовый бильярд), и объяснение возникновения в нем квантовых траекторий

Квантовый волчок с толчками (ОКС)

$$\hat{H}_S = \frac{p}{\tau} \hat{J}_y + \frac{K}{2j} \left(\hat{J}_z - \beta \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau) \quad (\hbar = 1)$$

$$\vec{J} = (J_x, J_y, J_z), [J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$$



Переход от интегрируемого (статистика Пуассона) к хаотическому (статистика Вигнера-Дайсона) движению.

$$j = 40, \beta = 0.1, \tau = 1, p = 1.7$$

Квантовый волчок с толчками в окружении

Траектории регистрируются квантовым окружением (термостатом)

Полный гамильтониан системы в цепочечном представлении:

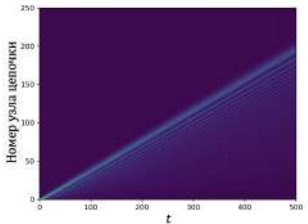
$$\hat{H}(t) = \hat{H}_S(t) + \underbrace{\hat{J}_y h(\hat{a}_0^+ + \hat{a}_0)}_{H_{\text{взаимодействия}}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (\epsilon_n \hat{a}_n^+ \hat{a}_n + h_n \hat{a}_{n+1}^+ \hat{a}_n + h_n \hat{a}_n^+ \hat{a}_{n+1})}_{H_{\text{окружения}}}$$

В представлении взаимодействия
по отношению к свободному термостату:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_S + \hat{J}_y h(\hat{a}_0^+(t) + \hat{a}_0(t)); \quad \hat{a}_0(t) = \sum_{k=0}^{m(t)} \phi_k(t) \hat{a}_k$$

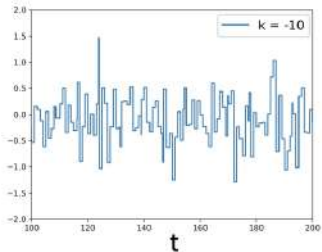
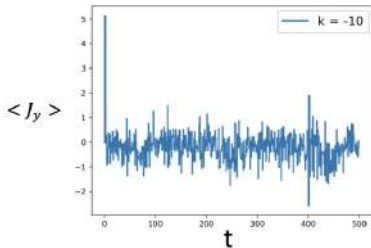
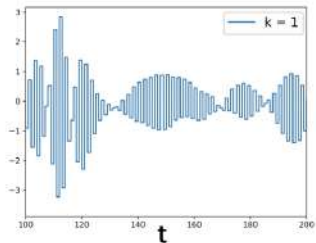
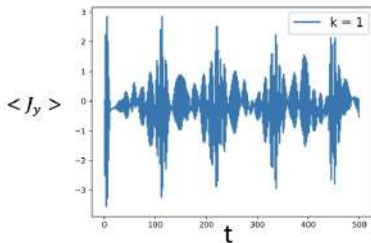
Уравнение Шредингера
для одночастичной волновой функции:

$$\begin{cases} \partial_t \phi_k(t) = i\epsilon_k \phi_k(t) + ih_k \phi_{k+1}(t) + ih_{k-1} \phi_{k-1}(t) \\ \phi_k(0) = \delta_{k0} \end{cases}$$



Квантовый волчок с толчками в окружении

Начальное состояние всей системы: $|\Psi(0)\rangle = | -J_y \rangle \otimes |0\rangle_E$



Моды окружения, несущие информацию о траектории волчка

Если мода успела возбудиться, то норма коммутатора отлична от нуля:

$$\hat{a}_0(t) = \sum \phi_k(t) \hat{a}_k$$

$$\|[\hat{a}_0(t), \hat{a}_j^+]\| = \sqrt{\underbrace{Tr([\hat{a}_0(t), \hat{a}_j^+][\hat{a}_0(t), \hat{a}_j^+]^+)}_{C_j(t)}}$$

1) Моды должны успеть

значимо провзаимодействовать с волчком :

$$\langle C_\chi^+(t) \rangle = \int_0^t C_\chi(\tau) d\tau = \langle \chi | \int_0^t |\phi(\tau)\rangle \langle \phi(\tau)| d\tau | \chi \rangle$$

Условие значимости состояния χ :

$$g_+(\chi, t) = \langle \chi | \rho_+(t) | \chi \rangle - a_{cut} > 0$$

2) Моды должны быть устоявшимися и отключиться от волчка :

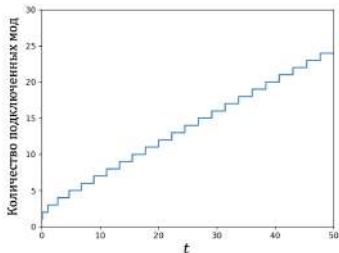
$$\langle C_\chi^-(t) \rangle = \int_t^T C_\chi(\tau) d\tau = \langle \chi | \int_t^T |\phi(\tau)\rangle \langle \phi(\tau)| d\tau | \chi \rangle = \langle \chi | \rho_-(t) | \chi \rangle$$

Необратимо отключившиеся моды лежат в подпространстве подключенных мод:

$$\kappa_1^{in}, \kappa_2^{in}, \dots, \kappa_{m_{in}(T)}^{in}$$

Условие отсутствия значимости для них:

$$g_-(\kappa^{in}, t) = \langle \kappa^{in} | \rho_-(t) | \kappa^{in} \rangle - a_{cut} < 0$$



Релевантные моды

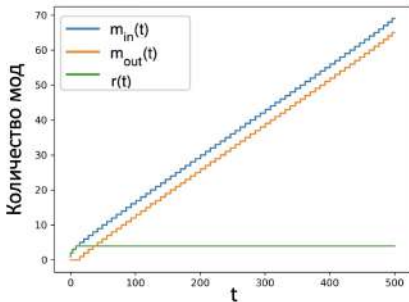
В момент времени t_k^{out} имеется $k - 1$ выходящих и $m_{in}(t_k^{out})$ входящих мод.

Релевантные моды: $r(t_k^{out}) = m_{in}(t_k^{out}) - k + 1$

$$i\partial_t|\Psi(t)\rangle = \hat{H}_{eff}(t)|\Psi(t)\rangle$$

$$\hat{H}_{eff}(t) = \hat{H}_S(t) + \sum_{k=1}^{r(t)} \left[\hat{J}_y \langle \phi(t) | \kappa_l^{rel} \rangle \hat{\kappa}_l^{rel} + \hat{J}_y \langle \phi(t) | \kappa_l^{rel} \rangle^* \hat{\kappa}_l^{rel+} \right] - \sum_{kl=1}^{r(t)} D_{kl}(t) \hat{\kappa}_l^{rel+} \hat{\kappa}_k^{rel}$$

где $D(t) = i \ln U_k / (t_k^{out} - t_k)$



Расчет энтропии ансамбля декогерентных историй

До $t = t_k^{out}$ мода κ_k^{out} разложение Шмидта:

$$|\Psi(t_k^{out})\rangle = \sum_q c_q(k) |\Psi_{col}^{(q)}(t_k^{out})\rangle_{rel} \otimes |\Psi_{jump}^{(q)}(t_k^{out})\rangle_{\kappa_k^{out}}; \quad \underbrace{|\Psi(t_k^{out})\rangle \rightarrow |\Psi_{coll}^{(q)}(t_k^{out})\rangle}_{\text{с вероятностью: } |C_q(k)|^2}$$

К моменту t отключилось $m_{out}(t)$ мод — столько же квантовых скачков:

$$\begin{aligned} |\Psi(t_1^{out})\rangle &\rightarrow |\Psi_{coll}^{(q_1)}(t_1^{out})\rangle_{rel} \\ |\Psi_{coll}^{(q_1)}(t_2^{out})\rangle_{rel} &\rightarrow |\Psi_{coll}^{(q_1 q_2)}(t_2^{out})\rangle_{rel} \\ |\Psi_{coll}^{(q_1 q_2)}(t_3^{out})\rangle_{rel} &\rightarrow |\Psi_{coll}^{(q_1 q_2 q_3)}(t_3^{out})\rangle_{rel} \quad \text{и т.д.} \end{aligned}$$

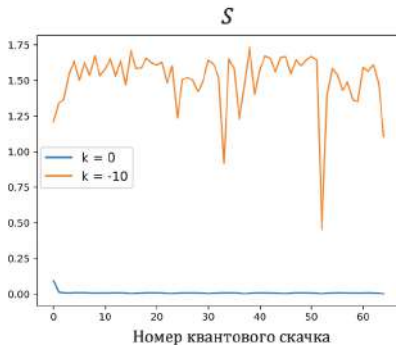
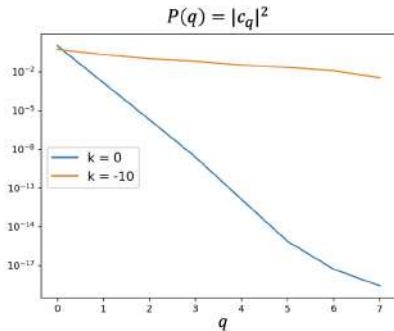
Декогерентная история:

История выборов $h = (q_1, q_2, \dots, q_k) = \{q_k\}_{k: t_k^{out} \leq t}$,
появляющихся с вероятностями: $P(q_1, q_2, \dots, q_k) = \prod_{k: t_k^{out} \leq t} |c_{q_k}(k)|^2$

Расчет энтропии ансамбля декогерентных историй

Энтропия ансамбля декогерентных историй:

$$S = - \sum_{\tilde{q}=(q_1, \dots, q_N)} P(\tilde{q}) \ln(P(\tilde{q}))$$



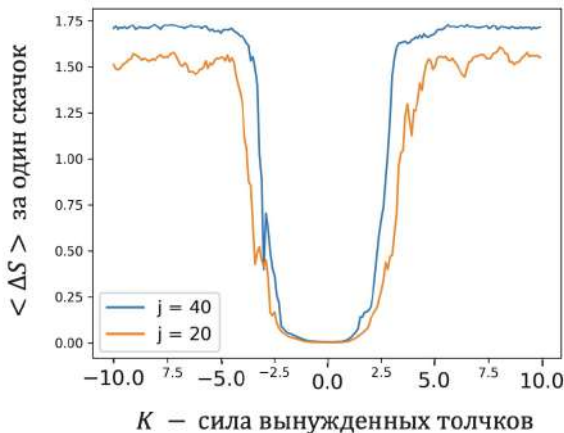
Распределение вероятности квантовых скачков $|c_q|^2$ (слева)
Мгновенное производство энтропии вдоль одной траектории (справа)

Расчет энтропии ансамбля декогерентных историй

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{P_{q+1}} c_{P_{q+1}} |\Psi_{col}(t, P_1, \dots, P_q, P_{q+1})\rangle_{rel} \otimes |\Psi_{jump}(t)\rangle_{P_{q+1}}$$

Энтропия за один скачок увеличится:

$$\Delta S = - \sum_{P_{q+1}} c_{P_{q+1}} \ln(c_{P_{q+1}}); \quad \langle \Delta S \rangle = \frac{1}{n} \sum_n \Delta S$$



Выводы:

- Проведен анализ критериев, определяющих квантовый хаос, и предложен новый способ его диагностики
- Благодаря подключению к квантовому волчку с толчками окружения как аналога записывающего устройства было введено понятие декогерентных историй (квантовых траекторий)
- Подтвердилось, что энтропия ансамбля таких траекторий для хаотического случая растет быстрее, чем для интегрируемого. Наблюдается резкий рост энтропии при переходе динамики системы от интегрируемой к хаотической на значениях силы толчка K от 2 до 3
- Данное исследование применимо к другим квантовым хаотическим системам

Спасибо за внимание!

Хотелось бы выразить благодарность Полякову Евгению Александровичу за полезные обсуждения и помощь в написании данной работы, а также Лычковскому Олегу Валентиновичу за рецензию!

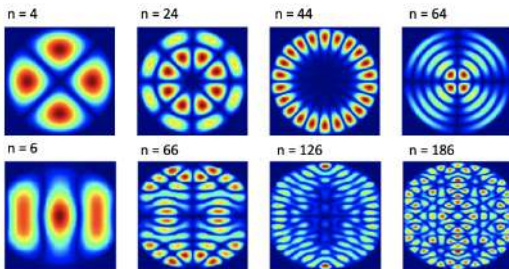
Бильярдные системы

В квантовом случае бильярдные системы описываются стационарным уравнением Шредингера:

$$\left(-\frac{\hbar}{2m}\Delta + V(r)\right)\psi_n(r) = E_n\psi_n(r), \quad V(r) = \begin{cases} 0, & r \in \Omega \\ \infty, & r \notin \Omega \end{cases}$$

эквивалентным уравнению Гельмгольца с граничным условием Дирихле ($\hbar = 2m = 1$):

$$\begin{cases} \Delta\psi_n(r) + k_n^2\psi_n(r) = 0, & r \in \Omega \\ \psi_n(r) = 0, & r \in \partial\Omega \end{cases}$$



Модель кубита в потенциале бильярда

$$\hat{H} = \frac{\Omega}{2}\sigma_z + \alpha(\sigma_+\hat{\psi} + \sigma_-\hat{\psi}^+) + \sum_{n=0}^{n_{max}} E_n \hat{\psi}_n^+ \hat{\psi}_n; \quad |\Psi(0)\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle_{bill}$$

В момент времени $t = 0$ кубит помещается в максимально локализованную в рассматриваемом диапазоне энергий в точке $\vec{x}'$ орбиталь бильярда:

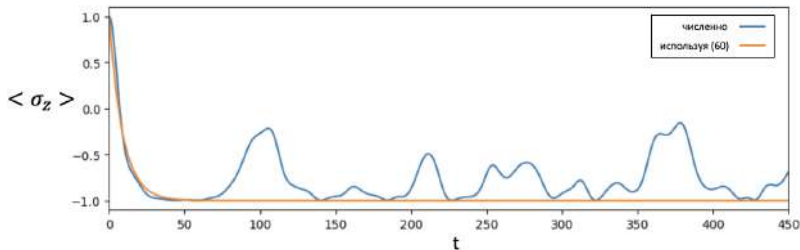
$$\phi_E(\vec{x}-\vec{x}') = \sum_{n=0}^{n_{max}} \langle \vec{x} | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \vec{x}' \rangle; \quad \hat{\psi}(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \hat{\psi}_n \langle \psi_n | \vec{x} \rangle; \quad \hat{\psi}^+(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \hat{\psi}_n^+ \langle \vec{x} | \psi_n \rangle$$

Корреляционная функция и спектральная плотность бильярдного окружения:

$$C(t) = \alpha^2 \sum_{k=0}^{n_{max}} e^{-iE_k t} |\langle \vec{x} | \psi_k \rangle|^2; \quad S(\omega) = 2\pi\alpha^2 \sum_{k=0}^{n_{max}} \delta(\omega - E_k) |\langle \vec{x} | \psi_k \rangle|^2$$

Самосогласованное уравнение:

$$\begin{cases} \gamma_{1 \rightarrow 0} = \int d\omega \frac{\Gamma/2}{(\omega - \Omega)^2 + \Gamma^2/4} \frac{1}{\pi} S(\omega) \\ \gamma_{1 \rightarrow 0} = \Gamma \end{cases}$$



Динамика затухания кубита в течение времени, $\langle \sigma_z(t) \rangle$.

Синяя кривая — численное решение уравнения Шредингера, оранжевая — численное решение самосогласованного уравнения: $2e^{-\Gamma t} - 1$

Нахождение прямого светового конуса, распространяющегося с минимальной скоростью

Решая многочастичную задачу на $[0, T]$ надо изначально оценить: $g_+(\chi, T) > 0$
Считается матрица плотности $\rho_+(T)$ и находится наиболее значимая мода:

$$\rho_+(T)|\phi_I\rangle = \pi_I|\phi_I\rangle$$

Статистически значимыми моды только: $\pi_I/\pi_1 > r_{cut}$: $\underbrace{\phi_1, \dots, \phi_{m_{in}(T)}}_{m_{in}(T) \text{ штук}}$

Для растягивания светового конуса можно сделать унитарное преобразование, так что наименее значимая мода подключалась самой поздней.

Для этого можно вычислять собственные значения $\rho_+(T)$ обратно во времени
В момент T — все моды подключены, их $m_{in}(T)$ штук.

В каждый момент времени τ ищется: $\rho_+(\tau)|\tilde{\phi}_k(\tau)\rangle = \pi_k(\tau)|\tilde{\phi}_k(\tau)\rangle$

Когда условие попадания в прямой световой конус нарушается:

$\pi_k(t_k^{in})/\pi_1(t_k^{in}) < r_{cut}$, мода отключается и добавляется в поток входящих мод:

$\kappa_{m(T)}^{in} = \tilde{\phi}_{m(T)}(t_{m(T)}^{in})$. Это происходит в каждый момент времени t_k^{in} .

Рекуррентно повторяя эти шаги, определяются все подключившиеся моды κ_k^{in} и t_k^{in} их подключения:

$$\begin{pmatrix} \kappa_1^{in} \\ \vdots \\ \kappa_{m_{in}(T)}^{in} \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \phi_1^{in} \\ \vdots \\ \phi_{m_{in}(T)}^{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{1,0}^{in} & \chi_{1,1}^{in} & \cdots \\ \chi_{2,0}^{in} & \chi_{2,1}^{in} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^{in} \\ \vdots \\ \phi_{m_{in}(T)}^{in} \end{pmatrix}$$

Нахождение необратимо отключившихся мод

Изначально $\rho_-(t)$ матрица размерности $m_{in}(t) \times m_{in}(t)$, она спроецирована на подпространство входящих мод $\kappa_1^{in}, \dots, \kappa_{m_{in}(t)}^{in}$, подключившихся к t .

В каждый момент времени от $t = 0$ до $t = T$ с шагом dt можно посчитать ее собственные значения: $\rho_-(t)|\tilde{\phi}_k^-(t)\rangle = \pi_k^-(t)|\tilde{\phi}_k^-(t)\rangle$

Когда $\pi_{m_{in}(t)}/\pi_1 < r_{cut}$ — мода, соответствующая $\pi_{m_{in}(t)}$ необратимо отключится от ОКС.

Как только мода отключается размерность матрицы ρ_- уменьшается на 1 в каждый момент времени t_k^{out} . Она проецируется на подпространство мод $m_{in}(t_k^{out}) - m_{out}(t_k^{out})$, подпространство размерности релевантных мод.

Выходящие необратимо отключившиеся моды рекуррентно получают из потока входящих мод унитарными преобразованиями:

$$\begin{pmatrix} \hat{\kappa}_1^{out+} \\ \hat{\kappa}_1^{rel+} \\ \vdots \\ \hat{\kappa}_{m_{in}(t_1^{out})-1}^{rel+} \end{pmatrix} = U_1 \begin{pmatrix} \hat{\kappa}_1^{in+} \\ \vdots \\ \hat{\kappa}_{m_{in}(t_1^{out})}^{in+} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \hat{\kappa}_k^{out+} \\ \hat{\kappa}_1^{rel+} \\ \vdots \\ \hat{\kappa}_{r(t_k^{out})-1}^{rel+} \end{pmatrix} = U_k \begin{pmatrix} \hat{\kappa}_1^{rel+} \\ \vdots \\ \hat{\kappa}_{r(t_k^{out})}^{rel+} \end{pmatrix}$$